Roll No.								

25614-MJ

B.Sc. VI SEMESTER [MAIN/ATKT] EXAMINATION MAY- JUNE 2025

MATHEMATICS
[Linear Algebra]
[Major Subject]

[Max. Marks : 60] *[Time : 3:00 Hrs.]*

Note : All THREE Sections are compulsory. Student should not write any thing on question paper.
नोट : सभी तीन खण्ड अनिवार्य हैं। विद्यार्थी प्रश्न–पत्र पर कुछ न लिखें।

[Section - A]

This Section contains **Multiple Choice Questions**. Each question carries **1 Mark**. All questions are compulsory.
इस खण्ड में **बहुविकल्पीय प्रश्न** हैं। प्रत्येक प्रश्न **1 अंक** का है। सभी प्रश्न अनिवार्य है।

Q. 01 If Q, R and C denotes respectively the fields of rational numbers, real numbers and complex numbers, then which of the following is not a vector space -
यदि Q, R तथा C क्रमशः परिमेय संख्याओं, वास्तविक संख्याओं तथा सम्मिश्र संख्याओं के क्षेत्र को निरूपित करते है तो निम्न में से कौन एक सदिश समष्टि नहीं है -

a) R(Q) **b)** C(R)
c) Q(R) **d)** C(C)

Q. 02 The set $S = \{a + i\,b, c + id\}$ is a basis of the vector space C(R) if and only if -
समुच्चय $S = \{a + i\,b, c + id\}$ सदिश समष्टि C(R) का आधार होगा यदि और केवल यदि -

a) $ab - cd = 0$ **b)** $ab \neq cd$
c) $ad - bc = 0$ **d)** $ad - bc \neq 0$

Q. 03 Which of the following map $f : V_3(R) \to V_2(R)$ is not a linear transformation -
निम्न में से कौन सा प्रतिचित्रण $f : V_3(R) \to V_2(R)$ एक रैखिक रूपान्तरण नहीं है -

a) $f(a, b, c) = (a, b)$ **b)** $f(a, b, c) = (b, c)$
c) $f(a, b, c) = (c, a + b)$ **d)** $f(a, b, c) = (a + 3, b + 3)$

Q. 04 Which of the following is not true in general -
निम्न में से क्या सामान्यतः सत्य नहीं है –

a) $< \alpha, \beta > = \overline{< \beta, \alpha >}$ **b)** $< t\,\alpha, \beta > = t < \alpha, \beta >$
c) $< \alpha, t\,\beta > = t < \alpha, \beta >$ **d)** $< \alpha + \beta, \gamma > = < \alpha, \gamma > + < \beta, \gamma >$

P.T.O.

Q. 05 Quadratic form associated with the diagonal matrix diag($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_n$) is
विकर्ण आव्यूह diag($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_n$) के संगत द्विघाती समघात है –

a) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 + \ldots + x_n^2$ **b)** $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2$

c) $\lambda_1^2 x_1^2 + \lambda_2^2 x_2^2 + \ldots + \lambda_n^2 x_n^2$ **d)** None of these
उपरोक्त में से कोई नहीं

[Section - B]

This Section contains **Short Answer Type Questions.** Attempt **any five** questions in this section in 200 words each. Each question carries 7 **Marks.**
इस खण्ड में **लघुउत्तरीय प्रश्न** हैं। इस खण्ड में **किन्हीं पांच** प्रश्नों को हल करें। प्रत्येक उत्तर 200 शब्दों में लिखें। प्रत्येक प्रश्न **7 अंक** का है।

Q. 01 If V(F) is a finite dimensional space and dim V = n then show that any subset of V with at least n + 1 vectors is linearly dependent.
यदि V(F) एक परिमेय विमीय सदिश समष्टि है तथा dim V = n है तो दर्शाइये कि V का उपसमुच्चय जिसमें n + 1 या अधिक सदिश हो, रैखिकत: परतन्त्र होता है।

Q. 02 Show that the given set $S \subseteq \mathbb{R}^3$ is a basis of vector space $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$:
दर्शाइये कि दिया गया समुच्चय $S \subseteq \mathbb{R}^3$ सदिश समष्टि $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ का आधार है :
$S = \{(1, 2, 1), (2, 1, 0), (1, -1, 2)\}$

Q. 03 Define vector space homomorphism. If f : U(F) → V(F) is a vector space homomorphism then prove that
i) $f(-\alpha) = -f(\alpha)$ ii) $f(\alpha - \beta) = f(\alpha) - f(\beta)\ \forall\ \alpha, \beta \in U$
सदिश समष्टि समाकारिता को परिभाषित कीजिये। यदि f : U(F) → V(F) एक सदिश समष्टि समाकारिता है तो सिद्ध कीजिये कि
i) $f(-\alpha) = -f(\alpha)$ ii) $f(\alpha - \beta) = f(\alpha) - f(\beta)\ \forall\ \alpha, \beta \in U$

Q. 04 A linear transformation $T : V_3(R) \to V_3(R)$ is defined by
T(a, b, c) = (2 b + c, a – 4 b, 3 a) Find its matrix representation with respect to the basis B where B = {(1, 0, 0) (0, 1, 0) (0, 0, 1)}
$T : V_3(R) \to V_3(R)$ एक रैखिक रूपान्तरण है जो
T(a, b, c) = (2 b + c, a – 4 b, 3 a) से परिभाषित है। आधार B के सापेक्ष T का मैट्रिक्स निरूपण ज्ञात कीजिये जहाँ B = {(1, 0, 0) (0, 1, 0) (0, 0, 1)}

Q. 05 In an inner product space V(C) Prove that two vector α, β are orthogonal if and only if -
$\| a\alpha + b\beta \|^2 = \| a\alpha \|^2 + \| b\beta \|^2, \forall\ a, b, \in (C)$
किसी आन्तर गुणन समष्टि V(C) में सिद्ध कीजिये कि दो सदिश α, β लाम्बिक होंगे यदि और केवल यदि -
$\| a\alpha + b\beta \|^2 = \| a\alpha \|^2 + \| b\beta \|^2, \forall\ a, b, \in (C)$

Cont. . .

Q. 06 Explain with example about the application of some inner product space.

किसी आन्तर गुणन समष्टि के अनुप्रयोग को सोदाहरण समझाइये।

Q. 07 Change the given quadratic form $q(x, x)$ into the canonical form by Lagrange's reduction method, where

दिए गये द्विघाती समघात $q(x, x)$ को लैग्राज के समानयन विधि द्वारा विहित समघात में समानयन कीजिये, जहां

$q(x, x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 7x_3^2 - 4\, x_1 x_2 + 8\, x_1 x_3$

Q. 08 For given matrix A, find its eigen values and corresponding eigen vectors, where -

दिये गये मेट्रीक्स (आव्यूह) A के आईगन मान तथा संगत आईगन सदिश ज्ञात कीजिये जहां -

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

[Section - C]

This section contains **Essay Type Questions**. Attempt **any two** questions in this section in 500 words each. Each question carries **10 marks**.

इस खण्ड में **दीर्घउत्तरीय प्रश्न** हैं। इस खण्ड में **किन्हीं दो** प्रश्नों को हल करें। प्रत्येक उत्तर 500 शब्दों में लिखें। प्रत्येक प्रश्न **10 अंकों** का है।

Q. 09 State and prove Fundamental Theorem of vector space homomorphism.

सदिश समष्टि समाकारिता का मूलभूत प्रमेय कथन देकर सिद्ध कीजिये।

Q. 10 Use Gram-Schmidt orthogonalization process to get a orthonormal basis of $V_3(R)$ give a basis $B = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ where

ग्राम – श्मिट के लाम्बिकता प्रक्रम का उपयोग कर $V_3(R)$ का प्रसामान्य लाम्बिक आधार प्राप्त कीजिये। दिया गया एक आधार $B = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ है जहां

$\beta_1 = (1, 0, 1)$, $\beta_2 = (1, 0, -1)$, $\beta_3 = (0, 3, 4)$

Q. 11 Reduce the following conic to its principal axes -

निम्न शांकव का उसके मुख्य अक्षों में समानयन कीजिये –

$10x^2 + 4\, x\, y + 7\, y^2 = 100$

Q. 12 State and prove the Cayley - Hamilton Theorem.

कैले हेमिल्टन प्रमेय कथन देकर सिद्ध कीजिये।

_____o_____