

Roll No.

25814-MJ

**B.Sc. VIII SEMESTER [MAIN] EXAMINATION
MAY- JUNE 2025**

**MATHEMATICS
[Complex Analysis]
[Major Subject]**

[Max. Marks : 60]

[Time : 3:00 Hrs.]

Note : All THREE Sections are compulsory. Student should not write any thing on question paper.
नोट : सभी तीन खण्ड अनिवार्य हैं। विद्यार्थी प्रश्न-पत्र पर कुछ न लिखें।

[Section - A]

This Section contains **Multiple Choice Questions**. Each question carries **1 Mark**. All questions are compulsory.

इस खण्ड में बहुविकल्पीय प्रश्न हैं। प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है। सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।

Q. 01 The value of the integral $\int_{|z|=1} \frac{\cos z}{z(z-4)} dz$ is -

समाकल $\int_{|z|=1} \frac{\cos z}{z(z-4)} dz$ का मान होगा -

a) $\frac{-\pi i}{2}$

b) $\frac{\pi i}{2}$

c) 0

d) None of these

उपरोक्त में से कोई नहीं

Q. 02 The Taylor series expansion of $\log(1-z)$ in $|z| < 1$ about $z=0$ is -

फलन $\log(1-z)$ का $|z| < 1$ में बिन्दु $z=0$ के परितः टेलर श्रेणी प्रसार होगा -

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

c) $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$

d) None of these

उपरोक्त में से कोई नहीं

Q. 03 If $f(z) = \frac{e^z}{z^2}$; then $f(z)$ =

a) is a meromorphic function

b) has an essential singularity at $z=0$,

c) has a removable singularity at $z=0$

d) is an entire function

P.T.O.

a) अनंत की फलन है b) $z = 0$ पर अनिवार्य विचित्रता रखता है
c) $z = 0$ पर अपनेय विचित्रता रखता है d) सम्पूर्ण फलन है

समाकल $\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{5 + 4 \cos \theta} d\theta$ का मान होगा

Q. 05 By transformation $w = z^2$, the circles $|z - a| = c$, a and c being real, in the z -plane correspond to the _____ in the w -plane -

रूपान्तरण $w = z^2$ के द्वारा वृत्त $|z - a| = c$ का जहाँ z -तल में a तथा c वास्तविक संख्याएँ हैं, के संगत w -तल में रूपान्तरण होगा –

[Section - B]

इस खण्ड में लघुउत्तरीय प्रश्न हैं। इस खण्ड में किन्हीं पांच प्रश्नों को हल करें। प्रत्येक उत्तर 200 शब्दों में लिखें। प्रत्येक प्रश्न 7 अंक का है।

कॉशी समाकलन सूत्र का प्रयोग कर समाकल $\int_C \frac{e^{2z}}{(z-1)(z-2)} dz$ का मान ज्ञात

कीजिये, जहां c एक वृत्त है जिसका समीकरण $|z| = 3$ है।

किसी विश्लेषिक फलन के लिये कॉशी की असमिका लिखिये एवं सिद्ध कीजिये।

$$\int_0^{1+i} z^2 \, dz$$

Cont. . .

Q. 04 Find the Taylor's and Laurent's series of $f(z) = \frac{z^2 - 1}{(z+2)(z+3)}$ in the region

i) $|z| < 2$ ii) $2 < |z| < 3$.

फलन $f(z) = \frac{z^2 - 1}{(z+2)(z+3)}$ की, दिये गये क्षेत्र में टेलर एवं लॉरेन्ट श्रेणी ज्ञात

कीजिये

i) $|z| < 2$ ii) $2 < |z| < 3$.

Q. 05 If a function $f(z)$ has a pole of order m at $z=a$, then prove that the function ϕ defined by $\phi(z) = (z-a)^m f(z)$ has a removable singularity at a and that $\phi(a) \neq 0$

यदि फलन $f(z)$ बिन्दु $z = a$ पर m कोटि का ध्रुव रखता हो, तब सिद्ध कीजिये कि फलन ϕ जहाँ $\phi(z) = (z-a)^m f(z)$ है, बिन्दु a पर अपनेय विचित्रता रखता है एवं $\phi(a) \neq 0$ होगा।

Q. 06 Find the residue of $f(z) = \frac{e^z}{z \sin(mz)}$ at the origin.

फलन $f(z) = \frac{e^z}{z \sin(mz)}$ का मूलबिन्दु पर अवशेष ज्ञात कीजिये।

Q. 07 By the method of contour integration find the value of $\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^2}$

कंटूर समाकलन विधि का प्रयोग कर समाकल $\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^2}$ का मान ज्ञात कीजिये।

Q. 08 Define a conformal mapping and discuss the transformation $w = z^2$.

अनुरूप प्रतिचित्रण को परिभाषित कर रूपान्तरण $w = z^2$ की विवेचना कीजिये।

[Section - C]

This section contains **Essay Type Questions**. Attempt **any two** questions in this section in 500 words each. Each question carries **10 marks**.

इस खण्ड में दीर्घउत्तरीय प्रश्न हैं। इस खण्ड में किन्हीं दो प्रश्नों को हल करें। प्रत्येक उत्तर 500 शब्दों में लिखें। प्रत्येक प्रश्न 10 अंकों का है।

Q. 09 Let $f(z)$ be analytic function within and on a closed contour C , and let a be any point within C . Then prove that

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-a} dz$$

मानलो $f(z)$ एक संवृत्त कंटूर C के अन्दर और उसके उपर विश्लेषिक फलन है, और मानलो C के अंदर कोई बिन्दु a है। तब सिद्ध कीजिये कि

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-a} dz$$

P.T.O.

Q. 10 State and prove Maximum modulus principle.

अधिकतम मापांक सिद्धांत का कथन लिखिये एवं सिद्ध कीजिये।

Q. 11 Apply the calculus of residues to prove that

अवशेष कलन का प्रयोग कर सिद्ध कीजिये

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \pi x}{x(1-x^2)} dx = \pi$$

Q. 12 Discuss the conformal mapping by the function $w = \tan^2 \left(\frac{\pi}{4a} \sqrt{z} \right)$

फलन $w = \tan^2 \left(\frac{\pi}{4a} \sqrt{z} \right)$ के द्वारा अनुरूप प्रतिचित्रण की विवेचना कीजिये।

_____○_____