

Q. 05 If α is an eigen vector of an operator T ; Then -

यदि α संकारक T का एक आइगेन सदिश है तब -

- a)** $\alpha = 0$

c) $\alpha < 0$

b) $\alpha > 0$

d) $\alpha \neq 0$

[Section - B]

This Section contains **Short Answer Type Questions**. Attempt **any five** questions in this section in 200 words each. Each question carries **7 Marks**.

इस खण्ड में लघुउत्तरीय प्रश्न हैं। इस खण्ड में किन्हीं पांच प्रश्नों को हल करें। प्रत्येक उत्तर 200 शब्दों में लिखें। प्रत्येक प्रश्न 7 अंक का है।

Q. 01 Prove that the intersection of two subgroups of a group G is also a subgroup of G .

सिद्ध कीजिये कि समूह G के दो उपसमूहों का सर्वनिष्ठ भी समूह G का एक उपसमूह होता है।

Q. 02 Prove that a subgroup H of a group G is a normal subgroup of G if and only if

$$x H x^{-1} = H \quad \forall x \in G$$

सिद्ध कीजिये कि समूह G का उपसमूह H , G का प्रसामान्य उपसमूह होगा यदि एवं केवल यदि

$$x H x^{-1} = H \quad \forall x \in G$$

Q. 03 If $f : G \rightarrow G'$ is a homomorphism of groups, then prove that -

- i) $f(e) = e'$ where e and e' are the identities of G and G' respectively.
- ii) $f(a^{-1}) = [f(a)]^{-1} \quad \forall a \in G$

यदि $f: G \rightarrow G'$ समूहों की एक समाकारिता है, तब सिद्ध कीजिये -

- i) $f(e) = e'$ जहाँ e और e' क्रमशः G तथा G' के तत्समक अवयव हैं।
 ii) $f(a^{-1}) = [f(a)]^{-1} \quad \forall a \in G$

Q. 04 Show that the group of automorphism of a cyclic group is abelian.

दर्शाइये कि चक्रीय समूह की स्वाकारिताओं का समूह आबेली होता है।

Q. 05 If there are two polynomials over ring of integers following as -

$$f(x) = 2 + 3x + 6x^2, \quad g(x) = 3 - 2x + 7x^2 - 9x^3$$

Then find (i) $f(x) + g(x)$ (ii) $f(x) \cdot g(x)$

यदि पूर्णाकों के वलय पर दो बहुपद निम्नानुसार हो -

$$f(x) = 2 + 3x + 6x^2, \quad g(x) = 3 - 2x + 7x^2 - 9x^3$$

तब ज्ञात कीजिये (i) $f(x) + g(x)$ (ii) $f(x) \cdot g(x)$

Cont. . .

Q. 06 Show that the set $W = \{(a, b, 0) : a, b \in F\}$ is a subspace of $V_3(F)$.

यदि $W = \{(a, b, 0) : a, b \in F\}$ सदिश समष्टि $V_3(F)$ का एक समुच्चय हो तब सिद्ध कीजिये कि $W, V_3(F)$ का एक उपसमष्टि है।

Q. 07 Let $\alpha = (1, 2, 1), \beta = (2, 9, 0)$ and $\gamma = (3, 3, 4)$ show that the set $S = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ is a basis of R^3 .

माना $\alpha = (1, 2, 1), \beta = (2, 9, 0)$ तथा $\gamma = (3, 3, 4)$ सिद्ध कीजिये कि समुच्चय $S = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, R^3 का एक आधार है।

Q. 08 Prove that the Kernel of homomorphism $f : U \rightarrow V$ is a subspace of $U(F)$.

सिद्ध कीजिये कि समाकारिता $f : U \rightarrow V$ की अष्टि $U(F)$ की एक उपसमष्टि है।

[Section - C]

This section contains **Essay Type Questions**. Attempt **any two** questions in this section in 500 words each. Each question carries **10 marks**.

इस खण्ड में दीर्घउत्तरीय प्रश्न हैं। इस खण्ड में किन्हीं दो प्रश्नों को हल करें। प्रत्येक उत्तर 500 शब्दों में लिखें। प्रत्येक प्रश्न 10 अंकों का है।

Q. 09 If Q is the set of rational number, $G = Q - \{-1\}$ and the operation '*' is defined in G by

$a \times b = a + b + a b \quad \forall a, b \in G$ then prove that $(G, *)$ is an abelian group.

यदि Q परिमेय संख्याओं का समुच्चय हो, $G = Q - \{-1\}$ तथा G में संक्रिया '*'

$a \times b = a + b + a b \quad \forall a, b \in G$ द्वारा परिभाषित है। तब सिद्ध कीजिये कि $(G, *)$ एक आबेली समूह है।

Q. 10 State and prove Cayley's Theorem.

कैले प्रमेय का कथन लिखिये एवं सिद्ध कीजिये।

Q. 11 If W_1, W_2 are two subspaces of a finite dimensional vector space $V(F)$, then prove that $\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$

यदि W_1, W_2 परिमित विमीय सदिश समष्टि $V(F)$ की दो उपसमष्टियाँ हो तब सिद्ध कीजिये $\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$

Q. 12 Show that the following matrix A is diagonalizable -

सिद्ध कीजिये कि निम्न आव्यूह A विकर्णीय है -

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

_____○_____