

Roll No.

--	--	--	--	--	--	--	--

A-25414-MN

**B.Sc. IV SEMESTER [MAIN] EXAMINATION
MAY- JUNE 2025**

**MATHEMATICS
[Abstract Algebra and Linear Algebra]
[Minor Subject]**

[Max. Marks : 60]

[Time : 3:00 Hrs.]

Note : All THREE Sections are compulsory. Student should not write any thing on question paper.
नोट : सभी तीन खण्ड अनिवार्य हैं। विद्यार्थी प्रश्न-पत्र पर कुछ न लिखें।

[Section - A]

This Section contains **Multiple Choice Questions**. Each question carries **1 Mark**. All questions are compulsory.

इस खण्ड में बहुविकल्पीय प्रश्न हैं। प्रत्येक प्रश्न **1** अंक का है। सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।

Q. 01 The number of finite subgroups in $(\mathbb{Z}, +)$ is -

$(\mathbb{Z}, +)$ में परिमित उपसमूहों की संख्या है -

- | | |
|-------|------|
| a) 1 | b) 4 |
| c) 11 | d) 0 |

Q. 02 The order of the symmetric group S_3 is -

सममित समूह S_3 की कोटि है -

- | | |
|-------|-------|
| a) 6 | b) 12 |
| c) 18 | d) 24 |

Q. 03 If R be a ring and let S be an ideal of R, then the additive identity element of the quotient ring R/S is -

यदि R एक वलय है तथा S, वलय R की एक गुणजावली है तब विभाग वलय R/S का योज्य तत्समक अवयव है -

- | | |
|--------|--------|
| a) S | b) O |
| c) S+1 | d) 1+S |

Q. 04 If W is a subspace of a finite dimensional vector space V(F), then -

यदि W परिमित विमीय सदिश समष्टि V(F) की एक उपसमष्टि हो तब -

- | | |
|---------------------------------|------------------------|
| a) $\dim V/W = \dim V - \dim W$ | b) $\dim V/W = \dim V$ |
| c) $\dim V/W = \dim V + \dim W$ | d) $\dim V/W = \dim W$ |

P.T.O.

Q. 05 If α is an eigen vector of an operator T ; Then -

यदि α संकारक T का एक आईगेन सदिश है तब -

- a)** $\alpha = 0$ **b)** $\alpha > 0$
c) $\alpha < 0$ **d)** $\alpha \neq 0$

[Section - B]

This Section contains **Short Answer Type Questions**. Attempt **any five** questions in this section in 200 words each. Each question carries **7 Marks**.

इस खण्ड में लघुउत्तरीय प्रश्न हैं। इस खण्ड में किन्हीं पांच प्रश्नों को हल करें। प्रत्येक उत्तर 200 शब्दों में लिखें। प्रत्येक प्रश्न 7 अंक का है।

Q. 01 Prove that the intersection of two subgroups of a group G is also a subgroup of G.

सिद्ध कीजिये कि समूह G के दो उपसमूहों का सर्वनिष्ठ भी समूह G का एक उपसमूह होता है।

Q. 02 Prove that a subgroup H of a group G is a normal subgroup of G if and only if

$$x \mathbf{H} x^{-1} = \mathbf{H} \quad \forall x \in \mathbf{G}$$

सिद्ध कीजिये कि समूह G का उपसमूह H , G का प्रसामान्य उपसमूह होगा यदि एवं केवल यदि

$$x \mathbf{H} x^{-1} = \mathbf{H} \quad \forall x \in \mathbf{G}$$

Q. 03 If $f : G \rightarrow G'$ is a homomorphism of groups, then prove that -

- i) $f(e) = e'$ where e and e' are the identities of G and G' respectively.
 - ii) $f(a^{-1}) = [f(a)]^{-1} \quad \forall a \in G$

यदि $f: G \rightarrow G'$ समूहों की एक समाकारिता है, तब सिद्ध कीजिये -

- i) $f(e) = e'$ जहाँ e और e' क्रमशः G तथा G' के तत्समक अवयव है।
ii) $f(a^{-1}) = [f(a)]^{-1} \quad \forall a \in G$

Q. 04 Show that the group of automorphism of a cyclic group is abelian.

दर्शाइये कि चक्रीय समूह की स्वाकारिताओं का समूह आबेली होता है।

Q. 05 If there are two polynomials over ring of integers following as -

$$f(x) = 2 + 3x + 6x^2, \quad g(x) = 3 - 2x + 7x^2 - 9x^3$$

Then find (i) $f(x) + g(x)$ (ii) $f(x) \cdot g(x)$

यदि पूर्णांकों के वलय पर दो बहुपद निम्नानुसार हो -

$$f(x) = 2 + 3x + 6x^2, \quad g(x) = 3 - 2x + 7x^2 - 9x^3$$

तब ज्ञात कीजिये (i) $f(x) + g(x)$ (ii) $f(x) \cdot g(x)$

Cont. . .

Q. 06 Show that the set $W = \{(a, b, 0) : a, b \in F\}$ is a subspace of $V_3(F)$.

यदि $W = \{(a, b, 0) : a, b \in F\}$ सदिश समष्टि $V_3(F)$ का एक समुच्चय हो तब सिद्ध कीजिये कि $W, V_3(F)$ का एक उपसमष्टि है।

Q. 07 Let $\alpha = (1, 2, 1), \beta = (2, 9, 0)$ and $\gamma = (3, 3, 4)$ show that the set $S = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ is a basis of R^3 .

माना $\alpha = (1, 2, 1), \beta = (2, 9, 0)$ तथा $\gamma = (3, 3, 4)$ सिद्ध कीजिये कि समुच्चय $S = \{\alpha, \beta, \gamma\}, R^3$ का एक आधार है।

Q. 08 Prove that the Kernel of homomorphism $f : U \rightarrow V$ is a subspace of $U(F)$.

सिद्ध कीजिये कि समाकारिता $f : U \rightarrow V$ की अष्टि $U(F)$ की एक उपसमष्टि है।

[Section - C]

This section contains **Essay Type Questions**. Attempt **any two** questions in this section in 500 words each. Each question carries **10 marks**.

इस खण्ड में दीर्घउत्तरीय प्रश्न हैं। इस खण्ड में किन्हीं दो प्रश्नों को हल करें। प्रत्येक उत्तर 500 शब्दों में लिखें। प्रत्येक प्रश्न **10** अंकों का है।

Q. 09 If Q is the set of rational number , $G = Q - \{-1\}$ and the operation '*' is defined in G by

$a * b = a + b + a b \quad \forall a, b \in G$ then prove that $(G, *)$ is an abelian group.

यदि Q परिमेय संख्याओं का समुच्चय हो , $G = Q - \{-1\}$ तथा G में संक्रिया '*' :

$a * b = a + b + a b \quad \forall a, b \in G$ द्वारा परिभाषित है। तब सिद्ध कीजिये कि $(G, *)$ एक आबेली समूह है।

Q. 10 State and prove Cayley's Theorem.

कैले प्रमेय का कथन लिखिये एवं सिद्ध कीजिये।

Q. 11 If W_1, W_2 are two subspaces of a finite dimensional vector space $V(F)$, then prove that $\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$

यदि W_1, W_2 परिमित विमीय सदिश समष्टि $V(F)$ की दो उपसमष्टियाँ हो तब सिद्ध कीजिये $\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$

Q. 12 Show that the following matrix A is diagonalizable -

सिद्ध कीजिये कि निम्न आव्यूह A विकर्णीय है -

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

