

Roll No.								
-----------------	--	--	--	--	--	--	--	--

25414-MN

B.Sc. IV SEMESTER [MAIN/ATKT] EXAMINATION
MAY- JUNE 2025

MATHEMATICS
[Abstract Algebra]
[Minor Subject]

[Max. Marks : 60]

[Time : 3:00 Hrs.]

Note : All THREE Sections are compulsory. Student should not write any thing on question paper.
नोट : सभी तीन खण्ड अनिवार्य हैं। विद्यार्थी प्रश्न-पत्र पर कुछ न लिखें।

[Section - A]

This Section contains **Multiple Choice Questions**. Each question carries **1 Mark**. All questions are compulsory.

इस खण्ड में बहुविकल्पीय प्रश्न हैं। प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है। सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।

- Q. 01** The generators of the cyclic group $(\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}, +_6)$ are -
चक्रीय समूह $(\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}, +_6)$ के जनक हैं -
a) 1, 2 b) 2, 3
c) 3, 4 d) 1, 5
- Q. 02** By Fermat's theorem, if 8^{103} is divided by 103, then the remainder will be -
फर्मा प्रमेय से, यदि 8^{103} , 103 से विभाजित करने पर शेषफल होगा -
a) 8 b) 9
c) 10 d) 11
- Q. 03** The order of the Alternative group A_3 is -
एकान्तर समूह A_3 की कोटि है -
a) 3 b) 6
c) 9 d) 18
- Q. 04** Let $G = \{a, a^2, a^3, a^4, a^5 = e\}$ be a cyclic group of order 5 then $O(A(G))$ is -
यदि $G = \{a, a^2, a^3, a^4, a^5 = e\}$ कोटि 5 का एक चक्रीय समूह है तब $O(A(G))$ है -
a) 3 b) 4
c) 2 d) None of these
उपरोक्त में से कोई नहीं

P.T.O.

Q. 05 Which of the following structures is not a field -

निम्न में से कौन सी संरचना क्षेत्र नहीं है -

a) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$

b) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$

c) $(\mathbb{C}, +, \cdot)$

d) $(\mathbb{I}, +, \cdot)$

[Section - B]

This Section contains **Short Answer Type Questions**. Attempt **any five** questions in this section in 200 words each. Each question carries **7 Marks**.

इस खण्ड में लघुउत्तरीय प्रश्न हैं। इस खण्ड में किन्हीं पांच प्रश्नों को हल करें। प्रत्येक उत्तर 200 शब्दों में लिखें। प्रत्येक प्रश्न 7 अंक का है।

Q. 01 Write a short note on Brahmagupta's achievement in algebra.

बीज गणित में ब्रह्मगुप्त की उपलब्धि पर एक संक्षिप्त टिप्पणी लिखिये।

Q. 02 Prove that the intersection of two subgroups of a group G is also a subgroup of G .

सिद्ध कीजिये कि समूह G के दो उपसमूहों का सर्वनिष्ठ भी समूह G का एक उपसमूह होता है।

Q. 03 Prove that a subgroup H of a group G is a normal subgroup of G if and only if each left coset of H in G is a right coset of H in G .

सिद्ध कीजिये कि समूह G का एक उपसमूह H , G का प्रसामान्य उपसमूह होता है यदि एवं केवल यदि G में H की प्रत्येक वाम सहसमुच्चय G में H की एक दक्षिण सहसमुच्चय है।

Q. 04 If $f: G \rightarrow G'$ is a homomorphism of groups, then prove that -

i) $f(e) = e'$ where e and e' are the identities of G and G' respectively.

ii) $f(a^{-1}) = [f(a)]^{-1} \quad \forall a \in G$

यदि $f: G \rightarrow G'$ समूहों की एक समाकारिता है, तब सिद्ध कीजिये -

i) $f(e) = e'$ जहाँ e और e' क्रमशः G तथा G' के तत्समक हैं।

ii) $f(a^{-1}) = [f(a)]^{-1} \quad \forall a \in G$

Q. 05 Prove that the group of automorphisms of an infinite cyclic group is of order 2.

सिद्ध कीजिये कि अनन्त चक्रीय समूह के स्वाकारिताओं के समूह की कोटि 2 है।

Q. 06 Prove that the intersection of two ideals of any ring $(R, +, \cdot)$ is an ideal of R .

सिद्ध कीजिये किसी वलय $(R, +, \cdot)$ की दो गुणजावलियों का सर्वनिष्ठ R की एक गुणजावली होती है।

Cont. . .

- Q. 07** State and prove Cauchy's theorem for finite abelian groups.
परिमित आबेली समूहों के लिये कोशी का प्रमेय लिखकर सिद्ध कीजिये।
- Q. 08** Prove that every finite integral domain is a field.
सिद्ध कीजिये कि प्रत्येक परिमित पूर्णाकीय प्रान्त एक क्षेत्र होता है।

[Section - C]

This section contains **Essay Type Questions**. Attempt **any two** questions in this section in 500 words each. Each question carries **10 marks**.
इस खण्ड में दीर्घउत्तरीय प्रश्न हैं। इस खण्ड में किन्हीं दो प्रश्नों को हल करें। प्रत्येक उत्तर 500 शब्दों में लिखें। प्रत्येक प्रश्न **10 अंकों** का है।

- Q. 09** Show that the set Q_1 of all rational numbers other than 1, forms an infinite abelian group with the operation '*' defined by the rule

$$a * b = a + b - ab \quad \forall a, b \in Q_1$$
सिद्ध कीजिये कि 1 के अतिरिक्त सभी परिमेय संख्याओं का समुच्चय Q_1 संक्रिया '*' जो निम्न प्रकार से परिभाषित है

$$a * b = a + b - ab \quad \forall a, b \in Q_1$$
एक अनन्त आबेली समूह बनाता है।
- Q. 10** Prove that the set of all cosets of a normal subgroup is a group with respect to multiplication of cosets as the composition.
सिद्ध कीजिये कि एक प्रसामान्य उपसमूह के सभी सहसमुच्चयों का समुच्चय, सहसमुच्चयों के गुणन के अधीन एक समूह होता है।
- Q. 11** State and prove Cayley's theorem.
कैले प्रमेय का कथन लिखिये एवं सिद्ध कीजिये।
- Q. 12** State and prove fundamental theorem of homomorphism of rings.
वलियों की समाकारिता का मूलभूत प्रमेय लिखिये एवं सिद्ध कीजिये।

_____○_____